DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284
УДК 517.95

ОБ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ГУРСА–ДАРБУ

© **И. В. Горохова**[1),] **В. И. Сумин**[2)]

[1)] ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»
603600, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. К. Минина, 24
E-mail: i_lisach@mail.ru
[2)] ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: v_sumin@mail.ru

Аннотация. Для нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью уравнения рассматривается задача максимизации функционала достаточно общего вида, определенного на решениях системы. Изучается ситуация сильного вырождения поточечного принципа максимума (необходимого условия оптимальности первого порядка при игольчатом варьировании управления), когда на особом управлении принципа максимума одновременно с ним вырождаются и условия оптимальности второго порядка. Приводятся достаточные условия сильного вырождения принципа максимума и необходимые условия оптимальности соответствующих особых управлений, обобщающие известные сходные условия, относящиеся к случаям терминального функционала качества и более гладкой правой части уравнения.
Ключевые слова: нелинейная система Гурса–Дарбу; условия Каратеодори; решение с ограниченной смешанной производной; задача оптимизации; поточечный принцип максимума; особое управление; условие оптимальности третьего порядка

В теории оптимизации распределенных систем *необходимые условия оптимальности* (НУО) *особых управлений* (ОУ) *поточечного принципа максимума* (ППМ) изучались в основном для управляемых систем Гурса–Дарбу и близких к ним (см., например, обзоры литературы в [1–4]). При этом для систем Гурса–Дарбу рассматривались, как правило, терминальные задачи оптимизации. Изучению ОУ ППМ для таких задач посвящено немало работ и в большинстве из них предполагалось, что правая часть

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727).

дифференциального уравнения и ее производные по «фазовым» переменным непрерывны по совокупности переменных; значительное внимание уделялось случаю, когда правая часть аффинна по производным и они в ней аддитивно отделены от управления (см., например, [1, §2], [3, 4] и библиографию в [1–4]).

Ниже описаны некоторые результаты применения схемы [2] изучения ОУ ППМ к задаче максимизации функционала достаточно общего вида, определенного на решениях нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью уравнения. Рассматривается случай, когда необходимо искать решения системы в классе AC^n_∞ абсолютно непрерывных n-вектор-функций с ограниченными смешанной и первыми производными. Изучается общая ситуация сильного вырождения ППМ (НУО первого порядка при игольчатом варьировании управления), когда на ОУ ППМ одновременно с принципом максимума вырождаются и условия оптимальности второго порядка. Приводятся достаточные условия сильного вырождения ППМ и НУО соответствующих ОУ, обобщающие известные сходные условия, относящиеся к случаям терминального функционала качества и более гладкой правой части уравнения.

Рассмотрим управляемую задачу Гурса–Дарбу

$$x''_{t^1t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)),\ t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0,1]^2, \tag{1}$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1),\ t^1 \in [0,1];\ x(0, t^2) = \varphi_2(t^2),\ t^2 \in [0,1], \tag{2}$$

где $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v)\colon \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $\varphi_i(t^i)\colon [0,1] \to \mathbf{R}^n\ (i = 1,2)$ заданы, $u(t)\colon \Pi \to V \subset \mathbf{R}^m$ — управление, V ограничено ($\mathbf{R}^n$ — пространство n-векторов-столбцов). Предполагаем: $g(t,l,v)$ дважды дифференцируема по l при каждом v для почти всех t и вместе с производными $g_l{}'$, $g_{ll}{}''$ L-измерима по t при любых $\{l,v\}$, непрерывна по $\{l,v\}$ для почти каждого t и ограничена на любом ограниченном множестве; φ_i абсолютно непрерывна, $\varphi_i(0) = 0$ и $\varphi_i' \in L^n_\infty([0,1])$ $(i = 1,2)$; допустимы измеримые управления. При таких условиях естественно рассматривать решения (1)–(2) из класса $AC^n_\infty \equiv AC^n_\infty(\Pi)$. Гарантирована единственность такого решения для каждого допустимого управления u. Пусть Ω — множество тех допустимых u, для каждого из которых существует глобальное класса AC^n_∞ решение x_u задачи (1)–(2).

Пусть $\Phi[\cdot]\colon C^n(\Pi) \to \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше функционал на классе непрерывных на Π n-вектор-функций. Рассмотрим задачу

$$J[u] \equiv \Phi[x_u] \to \max,\ u \in \Omega, \tag{3}$$

понимая ее как задачу нахождения $L^m_1 \equiv L^m_1(\Pi)$-локального максимума.

Введем обозначения для интегральных операторов: $A_0[z](t) \equiv \int_0^{t^1}\!\int_0^{t^2} z(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2$, $A_1[z](t) \equiv \int_0^{t^2} z(t^1,\xi)\,d\xi$, $A_2[z](t) \equiv \int_0^{t^1} z(\xi,t^2)\,d\xi$, $A[z](t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\}$, $t \equiv \{t^1,t^2\} \in \Pi, z \in L^n_1$. Формула $x(t) = \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + A_0[z](t)$, $t \in \Pi$, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между классом удовлетворяющих условиям (2) функций $x(\cdot) \in AC^n_\infty$ и классом L^n_∞ функций $z(\cdot)$, позволяет переписать задачу оптимизации (1)–(3) в эквивалентной форме

$$z(t) = f(t, A[z](t), u(t)), \quad t \in \Pi, \tag{4}$$

$$J[u] \equiv F[z_u] \to \max,\ u \in \Omega, \tag{5}$$

где $f(t,l,v) \equiv f(t,l_0,l_1,l_2,v) \equiv g(t,l_0+\varphi_1(t^1)+\varphi_2(t^2),l_1+\varphi_1'(t^1),l_2+\varphi_2'(t^2),v)$ и рассматриваемое над L_∞^n уравнение (4) — эквивалентная функционально-операторная переформулировка задачи (1)–(2), z_u — отвечающее управлению u глобальное решение (4), $x_u(t) = \varphi_1(t^1)+\varphi_2(t^2)+A_0[z_u](t)$, $t \in \Pi$; $F[z] \equiv \Phi[\varphi_1(\cdot)+\varphi_2(\cdot)+A_0[z](\cdot)]$, $z \in L_1^n$. Приведенное описание задачи оптимизации (1)–(3) в терминах уравнения (4) удобно для изучения ППМ, что видно, например, уже по выписанным ниже сопряженному уравнению ППМ и соответствующим уравнениям $(7_1), (7_2)$ и (8) НУО ОУ.

Пусть: u_0 — некоторое фиксированное допустимое управление, $x_0 \equiv x_{u_0}$, $z_0 \equiv z_{u_0}$; $S : L_1^n \to L_1^n$ — линейный оператор, задаваемый формулой $S[z](t) \equiv z(t) - f_l'(t)A[z](t)$, $f_l'(t) \equiv f_l'(t,A[z_0](t),u_0(t))$, $z \in L_1^n$, $t \in \Pi$; $F'(z_0), F''(z_0)$ — первая и вторая производные Фреше функционала $F : L_1^n \to \mathbf{R}$ в точке z_0, $\omega \in L_\infty^n$ — функция Рисса функционала $F'(z_0) \in (L_1^n)^*$; $\Delta_w f(t) \equiv f(t,A[z_0](t),w) - f(t,A[z_0](t),u_0(t))$, $t \in \Pi$, $w \in V$ (аналогично понимаем $\Delta_w f_l'(t)$); $\pi(t,w,\xi) \equiv \langle \xi, \Delta_w f(t)\rangle$, $t \in \Pi$, $w \in V$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$. Сформулируем ППМ: *если u_0 решение задачи (1)–(3), то для каждого $w \in V$ при почти всех $\tau \in \Pi$ выполняется неравенство $\pi(\tau,w,\psi(\tau)) \le 0$, где $\psi \in L_\infty^n$ — решение сопряженного уравнения* $S^*[\psi](t) \equiv \psi(t) - A^*[\{f_l'(\cdot)\}^*\psi(\cdot)](t) = \omega(t)$, $t \in \Pi$.

ППМ можно считать НУО первого порядка при игольчатом варьировании управления. Пусть: Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, w\}$, в каждом из которых w — какой-то элемент V, $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot,w,\psi(\cdot))$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma,\varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma \equiv \{\tau,w\} \in \Sigma$, а ε — такое положительное число, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon\Pi$ принадлежит Π. Каждому $h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление $u_h(t) \equiv \{w,\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau);\ u_0(t),\ t \in \Pi \backslash \Pi_\varepsilon(\tau)\}$, а каждому набору *параметров варьирования* $\sigma \equiv \{\tau,w\} \in \Sigma$ — семейство функций $\{u_h(\cdot)\}_{h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}}$, *простейшая одноточечная игольчатая варианта* (ПОИВ) управления u_0. Положим $\Delta_u J \equiv J[u] - J[u_0]$, $u \in \Omega$. Для любого $\sigma \equiv \{\tau,w\} \in \Sigma$ существует равный $\pi(\tau,w,\psi(\tau))$ предел $\delta J(\sigma) \equiv \delta J(\tau,w) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-2}\Delta_{u_h}J)$, который естественно назвать первой вариацией функционала J на варианте $\{u_h(\cdot)\}_{h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}}$. Очевидное НУО $\delta J(\sigma) \le 0$, $\sigma \in \Sigma$, управления u_0 и есть ППМ.

Положим $\mathcal{M} \equiv \{\{t,w\} \in \Pi \times V:\ \pi(t,w,\psi(t)) = 0\}$. Если u_0 решение (1)–(3), то при почти любом $t \in \Pi$ значение $u_0(t)$ принадлежит сечению $\mathcal{M}(t) \equiv \{w \in V:\ \{t,w\} \in \mathcal{M}\}$ множества $\mathcal{M}$. Пусть $\Pi_* \equiv \{t \in \Pi:\ \mathcal{M}(t) \ne \{u_0(t)\}\}$. Управление u_0 называем ОУ ППМ, если $\mathrm{mes}\Pi_* > 0$. Говорим, что ППМ вырождается на ОУ u_0. Случай, когда $\mathrm{mes}\,\Pi_* = \mathrm{mes}\,\Pi$ и при почти каждом $t \in \Pi$ сечение $\mathcal{M}(t)$ совпадает с V, назовем случаем *полного вырождения* ППМ. Далее для примера рассмотрим именно этот случай. Пусть ППМ полностью вырождается на ОУ u_0. Используя игольчатое варьирование, введем понятие сильного вырождения ППМ на ОУ u_0.

Предел $\delta^{\gamma-1}J(\sigma) \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\Delta_{u_h}J$, если он существует при некотором $\gamma > 2$, назовем *вариацией порядка $\gamma - 1$ функционала J на ПОИВ* $\{u_h(\cdot)\}_{h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}}$; соответственно НУО вида $\delta^{\gamma-1}J(\sigma) \le 0$ $(\sigma \in \Sigma)$ назовем *НУО порядка $\gamma - 1$ управления u_0 при простейшем одноточечном игольчатом варьировании.* Назовем ОУ ППМ u_0 *сильно* *вырожденным ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования* и будем говорить, что *ППМ сильно вырождается на ОУ* u_0, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J(\sigma) \equiv 0,\ \ \sigma \in \Sigma$.

Введем специальные обозначения: $f''_{ll}(\cdot)[p,q] \equiv \sum\limits_{i=1}^{3n}\sum\limits_{j=1}^{3n} f''_{l^i l^j}(\cdot)p^i q^j,\ \ p,q \in \mathbf{R}^{3n};\ \ \Gamma(u_0) \equiv \Big\{\{i,j\} :\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,3n};\ \Delta_w {f^i}'_{l^j}(t) = 0$ для любого $w \in V$ при почти всех $t \in \Pi\Big\}$; если $X = (X_{ij})$ — ($n \times 3n$)-матрица, то X^0 — $3n^2$-столбец, полученный развертыванием X по правилу «столбец за столбцом» $X^0 \equiv \{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n3n}\}$, а $M[\cdot]$ — обратный оператор свертывания $3n^2$-столбца в ($n \times 3n$)-матрицу, $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_{ij})$ — ($n \times 3n$)-матрица, в которой $\widetilde{X}_{ij} \equiv \{0,\ \{i,j\} \in \Gamma(u_0);\ X_{ij},\ \{i,j\} \notin \Gamma(u_0)\}$,

Теорема 1. *Пусть u_0 — полностью вырожденное ОУ ППМ и выполняются условия: (i) для любых $\xi \in L_\infty^{3n}$, $u \in \Omega$ формула*

$$b_1(\xi,u)[p,q] \equiv 2^{-1}\int\limits_{\Pi} \langle \psi(t),\ f''_{ll}(t,\xi(t),u(t))[A[p](t), A[q](t)]\rangle\, dt, \quad p,q \in L_1^n,$$

определяет над $L_1^n \times L_1^n$ ограниченный билинейный функционал $b_1(\xi,u)[.,.]$, непрерывно в норме $L_\infty^{3n} \times L_1^m$ зависящий от $\{\xi,u\}$; (ii) формула

$$b_2[p,q] \equiv \int\limits_{\Pi} \Big\langle \psi(t)\ ,\ \widetilde{M[q(t)]A[p](t)} \Big\rangle\, dt,\ p \in L_1^n,\ q \in L_1^{3n^2},$$

определяет над $L_1^n \times L_1^{3n^2}$ ограниченный билинейный функционал $b_2[.,.]$. Тогда ППМ сильно вырождается на ОУ u_0.

Если в условиях теоремы 1 существует вариация $\delta^3 J(\sigma),\ \ \sigma \in \Sigma$, то можно получить для u_0 содержательные НУО третьего порядка. Воспользуемся тем, что любой ограниченный билинейный над $L_1^n \times L_1^k$ функционал $b[\cdot,\cdot]$ единственным образом представим в виде

$$b[p,q] = \int\limits_{\Pi} dt \int\limits_{\Pi} p^*(t)\Theta(t,s)q(s)ds, \quad p \in L_1^n, \quad q \in L_1^k, \tag{6}$$

где $\Theta \in L_\infty^{n\times k}(\Pi \times \Pi)$. Пусть: $b_0[p,q] \equiv 2^{-1}F''(z_0)[p,q],\ p,q \in L_1^n$, где $F''(z_0)[\cdot,\cdot]$ — билинейный функционал второй производной Фреше $F''(z_0)$; $\Theta_0(t,s)$ и $\Theta_1(t,s)$ — ($n \times n$)-матрицы, отвечающие по формуле (6) функционалам b_0 и $b_{10} \equiv b_1(A[z_0],u_0)$; $\Theta_2(t,s)$ — ($n \times 3n^2$)-матрица, отвечающая функционалу b_2; I_k — тождественный оператор в L_1^k; $L_1^n \otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^n и L_1^k, натянутое на элементы $p(t) \otimes q(s) \equiv p(t)q^*(s)$ ($p \in L_1^n,\ q \in L_1^k$) и совпадающее с $L_1^{n\times k}(\Pi \times \Pi)$. Уравнение

$$(S \otimes S)^*[\eta(\cdot,\cdot)](t,s) = \Theta_i(t,s),\ \ \{t,s\} \in \Pi \times \Pi, \tag{7_i}$$

имеет единственное в $L_\infty^{n\times n}(\Pi \times \Pi)$ решение $\eta_i(t,s)$ ($i = 0,1$). Уравнение

$$(S \otimes I_{3n^2})^*[\eta(\cdot,\cdot)](t,s) = \Theta_2(t,s),\ \ \{t,s\} \in \Pi \times \Pi, \tag{8}$$

имеет единственное в $L_\infty^{n\times 3n^2}(\Pi \times \Pi)$ решение $\eta_2(t,s)$. Положим

$$E(t,s;v,w) \equiv \Big\langle \Delta_v f(t), \{\eta_0(t,s) + \eta_1(t,s)\}\Delta_w f(s) + \eta_2(t,s)\,\{\Delta_w f'_l(s)\}^0 \Big\rangle, t,s \in \Pi,\ v,w \in V.$$

Теорема 2. *Пусть* u_0 *— полностью вырожденное ОУ ППМ, выполняются условия теоремы 1, а также условие: (iii) для функции* $\eta_i(t,s)$ *правильные относительно* 4 *-мерной меры Лебега на* $\Pi \times \Pi$ *точки Лебега образуют на «диагонали»* $\{\{t,s\} \in \Pi \times \Pi : t = s\}$ *множество полной меры относительно* 2 *-мерной «диагональной» меры Лебега (* $i = 0,1,2$ *). Тогда при каждом* $w \in V$ *для почти любого* $\tau \in \Pi$ *на ПОИВ с параметрами* $\sigma = \{\tau, w\}$ *существует третья вариация* $\delta^3 J(\tau, w)$, *равная* $E(\tau,\tau; w,w)$. *Если* u_0 *решение задачи (1)–(3), то при каждом* $w \in V$ *для почти любого* $\tau \in \Pi$ *выполняется неравенство* $E(\tau,\tau; w,w) \le 0$.

О возможностях проверки условия (iii) в конкретных ситуациях см. [2], пример проверки для терминального функционала качества см. в [3, 4].

Чтобы распространить приведенные результаты на общий случай неполного вырождения ППМ на ОУ, нужно воспользоваться более общим способом одноточечного игольчатого варьирования, чем описанное выше простейшее варьирование (см. [2–4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука, 1990. 151 с.

2. *Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 20. Вып. 3. С. 70-80.

3. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума в терминальной задаче оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1264-1274.

4. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 4. С. 483-491.

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Горохова Ирина Владимировна, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: v_sumin@mail.ru

Для цитирования: *Горохова И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 278–284. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284

ABOUT SINGULAR CONTROLS OF POINTWISE MAXIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMIZATION PROBLEM CONNECTED WITH GOURSAT–DARBOUX SYSTEM

I. V. Gorokhova[1)], **V. I. Sumin**[2)]

[1)] Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev
24 Minin St., Nizhny Novgorod 603600, Russian Federation
E-mail: i_lisach@mail.ru
[2)] Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: v_sumin@mail.ru

Abstract. In this paper, we consider the problem of maximizing a sufficiently general functional defined on solutions of the controlled nonlinear Goursat-Darboux system. The right-hand side of the differential equation is a Caratheodory function. We study singular controls in the sense of the pointwise maximum principle, i.e. the controls for which this principle degenerates. We consider strong degeneration of the pointwise maximum principle (this principle is the necessary first-order optimality conditions by using of needle-shaped variation of a control) when the maximum principle degenerates together with second-order optimality conditions. Sufficient conditions for the strong degeneration of maximum principle and necessary conditions for the optimality of corresponding singular controls are given. These conditions generalize the conditions that are known for the case of the terminal quality functional and the case of the smoother right side of the equation.
Keywords: nonlinear Goursat–Darboux system; Caratheodory conditions; solution with bounded mixed derivative; terminal optimization problem; pointwise maximum principle; singular control; third order optimality condition

REFERENCES

1. Vasilev O.V., Srochko V.A., Terletskiy V.A. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. Ch. 2. Optimal'noe upravlenie* [Methods of Optimization and Their Applications. Part 2. Optimal Control]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1990, 151 p. (In Russian).

2. Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochechnogo printsipa maksimuma v raspredelennykh zadachakh optimizatsii [On singular controls in the sense of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 70-80. (In Russian).

The work is executed at financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of the project part of state task in the sphere of scientific activities in 2014-2016 (project № 1727).

3. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh printsipa maksimuma v terminal'noy zadache optimizatsii sistemy Gursa–Darbu [About singular controls of maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1264-1274. (In Russian).

4. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh printsipa maksimuma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa–Darbu [On singular controls of a maximum principle for the problem of the Goursat–Darboux system optimization]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 483-491. (In Russian).

Received 20 March 2018
Reviewed 24 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Gorokhova Irina Vladimirovna, Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: i_lisach@mail.ru

Sumin Vladimir Iosifovich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: v_sumin@mail.ru

For citation: Gorokhova I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochechnogo printsipa maksimyma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa–Darbu [About singular controls of pointwise maximum principle for optimization problem connected with Goursat–Darboux system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 278–284. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284 (In Russian, Abstr. in Engl.).